I frattali. Nuove idee per la geometria

Carlo Felice Manara,
Professore Emerito di geometria: Università degli Studi di Milano

di Carlo Felice Manara

Spesso la realtà ci spinge ad abbandonare i comodi schemi della nostra immaginazione per costruirne altri più adeguati. Il concetto astratto di oggetto frattale trova le sue premesse nel movimento scientifico ottocentesco che ha portato a precisare e dominare l'infinito matematico e il continuo geometrico. Per evitare di vedere i frattali ovunque, è necessario comprenderne la definizione geometrica rigorosa: solo così essi potranno diventare strumenti utili per avviare a soluzione anche alcuni problemi del mondo fisico

La creazione, relativamente recente, del concetto di "frattale" ha avuto una notevole pubblicità, e ha dato luogo a molte osservazioni e considerazioni, più o meno fondate, da parte di pubblicisti specializzati nella divulgazione scientifica. Così abbiamo potuto ascoltare e leggere che l'opera di Benoit Mandelbrot (il creatore della teoria) costituisce una "demolizione" della geometria classica euclidea, oppure che inizia una rivoluzione negli studi matematici, ed altre osservazioni del genere.

Il concetto matematico astratto di oggetto frattale

Prima di addentrarci nella trattazione dell'argomento osserviamo che la definizione classica di "frattale", data da Mandelbrot, fa appello necessariamente, e in modo fondamentale (come vedremo), alla similitudine geometrica; si potrebbe quindi dire che il nuovo concetto non costituisce per nulla una demolizione dell'opera euclidea, ma invece si fonda su uno dei sui principali concetti. Nel caso dei frattali, oltre al concetto euclideo di similitudine, un secondo aspetto fondamentale è costituito dalla ripetizione indefinita di certe procedure, ripetizione che conduce spesso ad immagini mentali confuse e che è dominata completamente soltanto dalla ragione. Entrambi questi aspetti fondamentali sono presenti nel concetto astratto di oggetto geometrico frattale; il quale infatti potrebbe essere descritto dicendo che esso si può pensare costituito da parti ognuna delle quali è in tutto simile all'oggetto intero.
Riflettendo su questa descrizione, si giunge facilmente a concludere che se ogni parte dell'oggetto deve essere in tutto simile all'oggetto intero, allora anche la parte deve poter essere pensata come costituita da parti, ognuna delle quali deve essere in tutto simile all'oggetto di partenza; appare quindi chiaro che si instaura in questo modo un procedimento infinito; e ciò conduce alla costruzione di oggetti geometrici che presentano delle proprietà spesso inattese, le quali possono anche presentare degli aspetti paradossali.
Ma "paradosso" non significa per ciò stesso contraddizione e quindi assurdità; in questo caso i paradossi mettono in luce delle circostanze che sfuggono ai collegamenti tradizionali dei concetti, e quindi stimolano i ricercatori a costruire nuove sistemazioni e spesso nuovi strumenti concettuali.

La polvere di Cantor

Nell'ordine di idee che stiamo presentando possiamo ritrovare nell'evoluzione della matematica e della geometria (avvenuta nel secolo XIX) i precedenti della moderna teoria dei frattali; ne cito qui soltanto alcuni, che sono classici per gli studiosi di matematica, ma che sono poco conosciuti da chi non appartiene a questa cerchia abbastanza ristretta, e pertanto è forse più accessibile alle divulgazioni giornalistiche, confortate da materiali illustrativi di particolare evidenza e suggestività. Si potrebbe dire che questi esempi sono frutto di un movimento scientifico che portò alla precisazione del concetto di infinito matematico, all'analisi del concetto di continuo geometrico ed alla costruzione di strumenti concettuali e formali rigorosi, atti a dominare questi fatti geometrici.
Il primo esempio sul quale vorrei soffermarmi è fornito da un insieme di punti di una retta che fu costruito dal grande matematico tedesco Georg Cantor (il fondatore della teoria degli insiemi) e che ancora oggi viene citato come "insieme triadico di Cantor" o anche *Cantor's dust*. La costruzione di questo insieme si descrive abbastanza semplicemente: immaginiamo un segmento di retta, dividiamolo in tre parti uguali (ognuna quindi lunga un terzo del segmento dato) ed "asportiamo"(o, se si vuole, "cancelliamo") il segmento centrale, lasciando al loro posto le altre due parti. Ognuna di queste è costituita dunque da un segmento, lungo 1/3 del segmento originario. Operiamo su ognuno di

questi segmenti come abbiamo operato sul segmento originario: dividiamo in tre parti uguali e "cancelliamo" le parti centrali. Si ottengono così in definitiva quattro segmenti, ognuno dei quali è lungo 1/9 del segmento originario; su ognuno di questi operiamo in modo analogo, dividendo in tre parti uguali e "cancellando" le parti centrali : si ottengono così 8 segmenti, ognuno dei quali è lungo 1/27 del segmento originario; e pensiamo di proseguire così indefinitamente. Se ci si affida alle figure ed alle illustrazioni, già dopo tre o quattro operazioni si ottiene un insieme di punti che appaiono sparsi e difficilmente distinguibili, e che fanno pensare ad una polvere; da qui il nome di "Polvere di Cantor" *(Cantor's dust)*.
Questo insieme ha degli aspetti sorprendenti, che hanno costretto i matematici a precisare alcuni concetti prima considerati come "naturali" oppure "evidenti". Anzitutto si ha che, sommando le lunghezze dei segmenti, che via via si "cancellano" ovvero si "asportano" dal segmento dato per costruire l'insieme in parola, si ottiene una lunghezza che è uguale a quella del segmento originario. Quindi si potrebbe dire, in forma approssimata ma suggestiva, che per costruire l'insieme di Cantor si "asporta" l'intero segmento; ma si dimostra che i punti rimasti, e cioè quelli che costituiscono l'insieme, sono "altrettanto numerosi" di quelli del segmento originario. L'aspetto clamorosamente paradossale del fatto fu già rilevato dallo stesso Cantor; ma il paradosso si supera osservando che i due concetti coinvolti, e precisamente quello di "misura" (o di "estensione") e quello di "numerosità" sono afferenti a diversi territori di esperienze e quindi di concettualizzazioni: in particolare i punti geometrici non si comportano come palline materiali, che occupano un volume proporzionale al loro numero; ed infine, per quanto riguarda il concetto di "numerosità" degli elementi di un insieme infinito (come quello in parola) non si possono estendere in modo automatico ed immediato i canoni di ragionamento che valgono per gli insiemi finiti. È questa una osservazione che già aveva fatto Galileo in un celebre passo della prima giornata dei *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze.*

Curve paradossali

Un secondo paradosso clamoroso, che suscitò sorpresa ed ammirazione al momento della sua costruzione, è dovuto al matematico italiano Giuseppe Peano il quale, in una celebre memoria del 1890, intitolata *Sur une courbe qui remplit toute une aire plane*, costruì un oggetto geometrico che passa per tutti i punti di un quadrato ma che risponde a quella che, fino a quel tempo, era considerata una definizione rigorosa di "curva continua". Lo stesso Peano rilevò che questa sua invenzione metteva in crisi il concetto di "dimensione", accettato come intuitivo fino a quel momento.
Anche in questo caso la situazione paradossale si supera osservando che l'immagine di curva continua ci viene dalla esperienza visiva delle figure elementari (rette, circonferenze ed altre curve semplici); oppure dalla esperienza elementare della osservazione di un corpo materiale, che presumiamo schematizzabile con un punto geometrico, e che si muove nell'ambiente. Inoltre, in corrispondenza alle esperienze elementari, si costruisce il concetto di "dimensione" di un oggetto geometrico. Prima della paradossale costruzione di Peano si pensava che i concetti di "curva", tratti dalle esperienze che abbiamo ricordato, fossero rappresentati in modo sufficiente dalle "funzioni continue" dell'analisi matematica classica. A queste funzioni erano attribuite delle proprietà, che sono originate dalla nostra immaginazione ma che non discendevano dalla definizione che se ne dava. Dopo Peano furono dati altri esempi di curve che hanno proprietà analoghe a quella costruita dal matematico italiano; questi oggetti sono comunemente denominati "curve di Peano". Inoltre furono costruiti molti esempi di oggetti, rispondenti alla definizione classica di "curva" ma privi di retta tangente in ogni punto; e, ancora una volta, questa proprietà ovviamente non si accorda con quella immagine che la nostra fantasia ci presenta come rispondente al concetto di "linea curva". Infine altri oggetti furono costruiti a partire da certi insiemi di punti del piano collegati con funzioni della variabile complessa. Diversi di questi oggetti sono riportati in illustrazioni divulgative molto diffuse; forse il successo della diffusione di figure cosiffatte è dovuto al fatto che tali oggetti appaiono dotati di forme che ci sembrano strane e fantastiche e quasi mostruose; forse anche perché la nostra fantasia viene colpita dal fatto che qualche piccola parte di un oggetto di questo genere, se fosse opportunamente ingrandita, fornirebbe una figura uguale a quella osservata in origine. Il che corrisponde esattamente a ciò che viene detto nella definizione di frattale che abbiamo dato.

Nuovi concetti e nuovi strumenti teorici

Gli esempi che abbiamo visto, ed altri numerosi che si potrebbero ricordare, hanno condotto i matematici a precisare le definizioni dei concetti astratti che riproducono gli oggetti materiali della fisica e della vita comune; ma li rappresentano entro certi limiti e con determinati margini di approssimazione. Inoltre la costruzione di questi nuovi oggetti geometrici ha stimolato la definizione di certi invarianti geometrici che ne descrivono alcune proprietà. In particolare si è costruito un invariante numerico che viene chiamato "dimensione frattale", e che può assumere valori non interi. Anche questa proprietà ha fatto galoppare certe fantasie, colpite dalla circostanza che, come si è detto, la concezione abituale della dimensione richiede che essa sia rappresentata da un numero intero naturale.
È interessante osservare che questi nuovi concetti possono contribuire, come si è detto, alla descrizione di oggetti materiali che finora si sono rivelati difficilmente dominabili con gli strumenti tradizionali (il che è avvenuto spesso nel corso della storia della matematica). Per esempio, si suole riconoscere una delle origini storiche del concetto di "frattale" nei problemi di rappresentazione e di misurazione di oggetti abitualmente considerati "irregolari": come accade per i confini tra due paesi, oppure per le coste frastagliate di una regione geografica. L'idea fondamentale che ha guidato alla ricerca della soluzione di questi problemi potrebbe essere presentata dicendo che si è cercato di estendere in modo ragionevole le

procedure classiche, per poter dominare efficacemente anche gli oggetti che prima non potevano essere trattati con gli strumenti abituali, spesso appesantiti dai limiti generati dalla immaginazione. Tuttavia occorre ricordare che la matematica è forse la scienza che ammette più difficilmente le volgarizzazioni; intendendo con questo nome, ovviamente, le volgarizzazioni serie. E difficilmente si potrebbe affermare che le figure, per quanto suggestive, pluricolorate e quasi mostruose, facciano parte delle volgarizzazioni serie, che contribuiscono alla comprensione di un concetto nuovo, ed aiutano a utilizzarlo per migliorare la nostra conoscenza della Natura.

L'immaginazione e i modelli matematici della realtà

Abbiamo parlato di immaginazione; a questo proposito osserviamo che essa non può fornire fondamento rigoroso ad alcun ragionamento autenticamente scientifico. Ciò era stato già osservato da Platone il quale aveva asserito che i geometri tracciano delle figure, ma hanno come oggetti di studio i concetti che tali figure rappresentano e richiamano, concetti che sono appresi soltanto dalla nostra mente e non dai sensi. A Platone fa eco, a distanza di secoli, Baruch Benedetto Spinoza il quale scrive, nel suo *Trattato teologico politico:* "...la semplice immaginazione non implica, per natura sua, alcuna certezza, quale è connessa invece ad ogni idea chiara e distinta, ma, per poter essere certi delle cose che immaginiamo, si deve necessariamente aggiungere qualche altra cosa, e cioè il ragionamento...".
Nel caso dei frattali, il grande interesse nato attorno a certi aspetti pittoreschi della teoria (aiutato anche dalla suggestione generata delle figure di cui abbiamo detto) ha spesso indotto qualcuno a trovare frattali quasi dovunque. Invero la definizione di questi oggetti a prima vista appare suggestiva; e pertanto può avvenire che molti oggetti della realtà materiale quotidiana vengano sbrigativamente classificati secondo questo concetto.
Quindi capita di ascoltare per esempio che il fegato è un frattale, perché ogni sua parte, opportunamente definita, può svolgere le funzioni che sono svolte dall'organo intero. In questo ordine di idee ognuno può individuare dei frattali nei numerosissimi sistemi che si incontrano nella vita quotidiana. Così per esempio, avendo riguardo alla struttura gerarchica di ogni impresa appena un po' sviluppata (per esempio una banca con filiali ed agenzie) si può dire, volendo, che essa presenta una struttura frattale.
Forse vale la pena di dire che nella realtà materiale, fisica, non esistono frattali, nel senso rigoroso e proprio (matematico) del termine. Infatti abbiamo visto che il concetto di frattale geometrico, nella accezione primaria e rigorosa del termine, è strettamente legato a procedimenti infiniti di definizione e di costruzione; e ciò esclude ovviamente che il concetto rigoroso di frattale possa trovare una realizzazione esatta nella realtà del mondo materiale fisico. È vero che vi sono dei problemi materiali che in qualche modo possono essere illustrati ed avviati a soluzione con questi nuovi strumenti; ma non si può pretendere che la realtà fisica sia rappresentata fino negli ultimi particolari da questi concetti. Il che del resto è un fatto molto noto, fin dalle prime crisi dei modelli fisico-matematici della realtà.
Un esempio valga per tutti: prima di questo secolo, lo schema della continuità, mutuato dalla geometria e da questa costruito sulla elaborazione che la fantasia fa delle nostre limitate sensazioni, era stato considerato come fondamentale per la scienza fisico-matematica. Si potrebbe addirittura pensare che forse senza queste elaborazioni della fantasia non sarebbero nati dei capitoli fondamentali della matematica, come il calcolo infinitesimale. Tuttavia tale schema non è affatto necessario per una descrizione valida dei fenomeni fisici, come ha mostrato la meccanica quantistica, nata dalla intuizione creativa di Max Planck.
Ovviamente è chiaro che nessuno è proprietario di una parola o di un termine, e quindi nessuno può impedire agli altri di utilizzare tale termine, o giudicare che l'impiego sia errato se non è consono ai canoni originari, stabiliti dalla definizione primitiva. Tuttavia vorremmo osservare che il vezzo di applicare il concetto di frattale a diversi oggetti materiali può derivare dal fatto di aver interpretato la definizione dell'oggetto geometrico in senso soltanto parziale, e quindi fuorviante.
A questo proposito mi pare che sia esemplare l'esempio citato poco fa: l'immagine del continuo geometrico si presenta alla nostra fantasia come del tutto naturale; e nella fisica matematica tradizionale, almeno fino a Planck, lo schema della continuità ha ispirato i modelli della realtà materiale che gli scienziati si costruivano. Se si leggono oggi i numerosi commenti che vennero fatti quando Planck introdusse il concetto di "granularità" dell'energia, cioè abbandonò l'immagine classica fornita dalla continuità, ci si può render conto della influenza che l'immaginazione esercita sulla costruzione dei modelli, che fondano la formulazione delle teorie, cioè delle spiegazioni coerenti e sistematiche di numerosi fatti sperimentali tra loro collegati; e si comprendono le difficoltà che incontriamo nell'abbandonare le immagini abituali.
Tuttavia, a un certo punto della storia, la realtà ci costringe ad abbandonare i comodi schemi abituali per costruirne altri, spesso molto diversi ma più validi. Ma ciò non comporta delle rivoluzioni nei principi della scienza, ma semplicemente - ripetiamo - l'abbandono di certe abitudini della nostra immaginazione.
In un analogo ordine di idee, la teoria dei frattali costituisce un passo importante, per dotare la matematica di strumenti formali diversi da quelli forniti dall'analisi matematica classica; strumenti che sono fondati, come si è detto, prevalentemente sull'immagine del continuo. E ciò comporta un più rigoroso impiego della deduzione, senza tuttavia sconvolgere le basi del nostro ragionare scientifico. ●